УДК 519.7

РЕШЕНИЕ АВТОМАТНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ОПЕРАЦИИ КОМПОЗИЦИИ

Н.В. Спицына*, Н.В. Евтушенко*, А.Ф. Петренко**

**Томский государственный университет, г.Томск*
***CRIM, Montreal, Canada*

В работе вводится определение обобщенной синхронной композиции полуавтоматов. Показывается, что известные операторы являются частными случаями введенного оператора и что соответствующее автоматное уравнение разрешимо и имеет наибольшее решение. Формула для наибольшего решения содержит операторы расширения, пересечения и дополнения языков.

Ключевые слова: *обобщенная синхронная композиция, полуавтоматы, автоматное уравнение.*

Введение

Во многих приложениях возникает задача описания поведения компоненты дискретной системы [1]. Если поведение каждой компоненты и всей системы описано регулярным языком, то задача формализуется как решение соответствующего автоматного уравнения. Однако в большинстве публикаций уравнение решается только для бинарного оператора композиции [2]. В данной работе определен n-арный оператор обобщенной композиции для случая, когда поведение компонент и всей системы описывается полуавтоматом или источником, и показано, что известные операторы являются частными случаями введенного оператора. Кроме того, показано, что автоматное уравнение разрешимо и имеет наибольшее решение. Формула для наибольшего решения, как и в случае бинарной композиции, содержит операторы расширения, пересечения и дополнения языков, т.е. в случае регулярных языков существует эффективный алгоритм нахождения наибольшего решения уравнения.

1. Обобщенная синхронная композиция языков и автоматов

Рассмотрим композицию из n модулей, поведение каждого из которых описано последовательностями действий, т.е. некоторым формальным языком. Мы полагаем, что модули взаимодействуют, обмениваясь допустимыми словами, и на этой основе вводим понятие композиции формальных языков. Пусть M – система из взаимодействующих модулей $C_1, \ldots, C_m$. Каждый модуль имеет внешние полюсы для взаимодействия с другими компонентами. Внешние полюсы системы также считаются компонентами. Пусть алфавит A_{ij} соответствует j-му полюсу компоненты C_i, т.е. на этом полюсе возможны последовательности сигналов только из алфавита A_{ij}. Каждый алфавит, по определению, обладает так называемым «молчащим» символом ν для представления ситуации, когда сигнал на данном полюсе отсутствует. Поведение компоненты C_i описывается языком L_i в декартовом произведении всех алфавитов A_{ij}. Мы полагаем, что язык, допустимый на внешнем полюсе, есть совокупность всех слов в соответствующем алфавите.

Обозначим через π разбиение множества алфавитов, соответствующих полюсам всех компонент системы. Иными словами, π задает структуру композиции, объединяя в один класс алфавиты отождествленных полюсов, т.е. алфавиты полюсов, которые соединены друг с другом, и поэтому сигнал на этих полюсах в каждый такт один и тот же. Каждому классу b_i разбиения π поставим в соответствие пересечение B_i всех алфавитов класса b_i. Таким образом, только сигналы из алфавита B_i могут появиться на полюсах, алфавиты которых входят в класс b_i разбиения π. Пусть $\theta\subseteq\pi$ – множество всех блоков из π, которые содержат внешние полюсы системы M, т.е. последовательности сигналов на этих полюсах описывают внешнее поведение системы.

Тогда язык, описывающий поведение всей системы, можно построить следующим образом. Пусть разбиение π имеет k блоков.

Шаг 1. Расширяем язык каждой компоненты системы путем вставки всех конечных последовательностей произвольной длины из «молчащих» символов. Данная операция необходима, чтобы описать «неучастие» компоненты во взаимодействии с другими компонентами («молчание» компоненты) в определенные такты работы системы. В результате операции получим ν-замыкание языка L_i^{ν} каждой компоненты.

Шаг 2. На следующем шаге необходимо преобразовать (расширить) ν-замкнутый язык L_i^{ν} каждой компоненты C_i, заданный в декартовом произведении алфавитов полюсов i-й компоненты, в язык $\exp_{\pi}(L_i^{\nu})$ в декартовом произведении $B_1\times\ldots\times B_k$ алфавитов всех классов разбиения π. Язык $\exp_{\pi}(L_i^{\nu})$ содержит все слова на полюсах системы, которые порождают на полюсах компоненты C_i слова из языка L_i^{ν}. Для этого нужно осуществить следующую операцию подстановки f. Набор $a_1,\ldots,a_{li}$ на полюсах компоненты заменяется на набор из «молчащих» символов ν, если набор содержит символы, которые не могут появиться на соответствующем полюсе. Таким образом, $f(a_1\ldots a_{li}) = (\nu\ldots\nu)$, если $\exists r,t\in\{1, \ldots, l_i\}$ такие, что $a_r\neq a_t$, в то время как A_{ir} и A_{it} принадлежат одному и тому же классу разбиения π; или $\exists r\in\{1, \ldots, l_i\}$ такое, что $a_r \notin B_t$, в то время как A_{ir} принадлежит классу b_t разбиения π.

Если набор $a_1\ldots a_{li}$ состоит из допустимых значений сигналов на каждом из полюсов, то данный набор может появиться на полюсах компоненты при любых значениях сигналов на других полюсах системы. В этом случае $f(a_1\ldots a_{li}) = m_1\times\ldots\times m_k$, где $m_t = \{a_r\}$, если A_{ir} принадлежит классу b_t разбиения π, и $m_t = B_t$, если класс b_t разбиения π не содержит полюсов компоненты C_i, $t = 1, \ldots, k$.

Шаг 3. Пересечение языков $\exp_{\pi}(L_i^{\nu})$[1] определяет все возможные слова, которые могут появиться на полюсах композиции, если поведение каждой компоненты описано языком L_i. Чтобы найти внешнее поведение системы, достаточно найти проекцию пересечения на внешние (наблюдаемые) полюсы системы и удалить (если необходимо) все подпоследовательности, состоящие только из «молчащих» наборов.

Полученный язык $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(L_1, \ldots, L_m) = [\exp_{\pi}(L_1^{\nu})\cap\ldots\cap\exp_{\pi}(L_m^{\nu})]_{\downarrow\theta}$ называется *обобщенной синхронной композицией* или просто *обобщенной композицией* языков $L_1, \ldots, L_n$ (для заданной структуры композиции π и множества внешних полюсов θ). Введенные в [3] операции бинарной синхронной и параллельной композиции являются частными случаями языка $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(L_1, L_2)$. В случае синхронной композиции в каналах отсутствуют «молчащие» символы. В случае параллельной композиции в каждом такте взаимодействие возможно только по одному каналу, т.е. каждый возможный набор значений на полюсах всех компонент содержит не более одного «немолчащего» символа.

В данной работе мы предполагаем, что поведение каждой компоненты описано регулярным языком. Так как множество регулярных языков замкнуто относительно операций расширения, подстановки и пересечения, то обобщенная композиция регулярных языков также является регулярным языком, т.е. композицию регулярных языков можно описать посредством соответствующих операций над детерминированными полуавтоматами [4].

Детерминированным полуавтоматом или в данной работе просто *автоматом* далее называется пятерка $A=(S, V, T, r, F)$, где S – конечное множество состояний с выделенным начальным состоянием r и множест-

[1] Все языки определяются для одного и того же порядка алфавитов B_t, $t = 1, \ldots, k$.

вом F финальных состояний, V – конечное множество действий и $T \subseteq V \times S \times S$ – отношение переходов. Для любой пары состояния p автомата A и действия $v \in V$ существует в точности одно состояние n, такое, что $(v,p,n) \in T$, т.е. (v,p,n) является переходом в автомате. Отношение переходов может быть распространено на последовательности в алфавите V. Пусть $p \in S$ и $v_1 ... v_k \in V^*$. Тройка $(v_1 ... v_k, p, n) \in T$, если и только если существует последовательность состояний $s_0, ..., s_k \in S$ такая, что $s_0 = p$ и $(v_j, s_j, s_{j+1}) \in T$, $j = 0,...,k$.

Языком автомата A, обозначение: L_A, называется множество последовательностей в алфавите V, получаемых при последовательных переходах из начального состояния в финальные состояния. Формально, язык L_A есть подмножество V^*, и последовательность $v_1 ... v_k \in L_A$, если и только если $\exists n \in F (v_1 ... v_k, r, n) \in T$. Автомат B называется *редукцией* автомата A, обозначение: $B \leq A$, если язык автомата B содержится в языке автомата A. Автоматы B и A называются *эквивалентными*, если их языки совпадают, обозначение: $B \cong A$.

Известно [4], что множество регулярных языков совпадает с множеством автоматных языков. Более того, каждой операции над регулярными языками можно поставить в соответствие автомат, реализующий результат операции. Поэтому в случае, когда поведение каждой компоненты системы описывается регулярным языком или автоматом, можно говорить об обобщенной синхронной композиции $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_m)$ автоматов $C_1, \ldots$и C_m, т.к. полученный язык является регулярным. Для того, чтобы построить автомат, реализующий v-замыкание L_i^v языка компоненты L_i, достаточно в автомате C_i добавить в каждом состоянии петлю, помеченную набором из «молчащих» символов v. Для построения расширения $\exp_\pi(L_i^v)$ языка L_i^v каждый набор $a_1 \ldots a_{li}$, помечающий переход в компоненте C_i, заменяется либо набором из «молчащих» символов, либо множеством $m_1 \times \ldots \times m_k$, где $m_t = \{a_r\}$, если A_{ir} принадлежит классу b_t разбиения π, и $m_t = B_t$, если класс b_t разбиения π не содержит полюсов компоненты C_i, $t = 1, \ldots, k$. Автоматы, реализующие операции пересечения и проекции автоматных языков, строятся обычным образом [4]. Таким образом, существует эффективный алгоритм построения обобщенной композиции $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_m)$ автоматов $C_1, \ldots$и C_m.

2. Решение автоматного уравнения для обобщенной композиции

Рассмотрим обратную задачу, задачу декомпозиции дискретной системы на m компонент, при условии, что поведение каждой компоненты описано автоматом. Если все компоненты $C_1, \ldots, C_{m-1}$ композиции, кроме одной, известны, известен автомат C, который описывает поведение синтезируемой системы, и известна структура последней, то задача нахождения описания m-й компоненты сводится к решению уравнения $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \cong C$. В данном разделе мы решаем неравенство $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \leq C$ и показываем, что данное неравенство всегда имеет наибольшее решение *Largest*. Если $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, Largest) \cong C$, то *Largest* является также и наибольшим решением уравнения $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \cong C$. В противном случае уравнение не имеет решения.

Автомат B называется решением неравенства $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \leq C$ (уравнения $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \cong C$), если $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, B) \leq C$ (уравнения $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, B) \cong C$). Решение называется *наибольшим*, если любое решение является его редукцией.

Заметим, что решение автоматного неравенства сводится к решению неравенства $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \subseteq C$ в алгебре регулярных языков. Мы далее для простоты изложения используем один и тот же символ для автомата и языка, реализуемого этим автоматом. Пусть $A = \{A_1, \ldots A_s\}$ – множество алфавитов, $C_1, \ldots, C_{m-1}$ и C – регулярные языки в декартовом произведении подмножеств A. Пусть, кроме того, известно множество алфавитов, в декартовом произведении которых должен быть определен язык неизвестной компоненты X. Обозначим через π разбиение множества A, задающее структуру синтезируемой сети, и через ρ – множество классов из π, которые содержат алфавиты языка X, т.е. ρ представляет множество полюсов неизвестной компоненты. Как и ранее, подмножество θ представляет множество внешних полюсов сети, т.е. множество алфавитов, в декартовом произведении которых задан язык C.

Теорема 1. Наибольшим решением неравенства $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \subseteq C$ является язык $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1}, \overline{C})}$.

Доказательство. Последовательность α не принадлежит решению неравенства $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(L_1,\ldots, C_{m-1},X) \subseteq C$, если и только если $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1,\ldots, C_{m-1},\{\alpha\}) \not\subseteq C$. Следующие утверждения эквивалентны.

1) $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1,\ldots,C_{m-1},\{\alpha\}) \subseteq C$;

2) $[\exp_\pi(\alpha) \cap \exp_\pi(C_1) \cap \ldots \cap \exp_\pi(C_{m-1})]{\downarrow_\theta} \cap \overline{C} = \varnothing$;

3) $\exp_\pi(\alpha) \cap \exp_\pi(C_1) \cap \ldots \cap \exp_\pi(C_{m-1}) \cap \exp_\pi(\overline{C}) = \varnothing$;

4) $\alpha \notin [\exp_\pi(C_1) \cap \ldots \cap \exp_\pi(C_{m-1}) \cap \exp_\pi(\overline{C})]{\downarrow_\rho}$;

5) $\alpha \notin \mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1}, \overline{C})$;

6) $\alpha \in \overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1}, \overline{C})}$.

Известно, что регулярные языки замкнуты относительно всех операций, используемых в формуле для наибольшего решения неравенства. Таким образом, используя известные операции над автоматами, можно построить автомат, реализующий регулярный язык $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1},\overline{C})}$, т.е. найти неизвестную компоненту X.

Следствие. Автомат B является решением неравенства $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, B) \le C$, если и только если B есть редукция автомата $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1},\overline{C})}$.

Теорема 1. Если автомат $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, \mathit{Largest})$, где $\mathit{Largest} = \overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1},\overline{C})}$, эквивалентен C, то $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1},\overline{C})}$ есть наибольшее решение уравнения $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, X) \cong C$; однако, не всякая редукция автомата *Largest* обладает этим свойством. Если автоматы $\mathrm{comp}_{\pi,\theta}(C_1, \ldots, C_{m-1}, \mathit{Largest})$ и C не эквивалентны, то уравнение не имеет решения.

Замечание. Разрешимость уравнения существенно зависит от выбора алфавитов неизвестной компоненты, которые, вообще говоря, определяют топологию синтезируемой сети, т.е. от множества ρ классов разбиения π.

Пример

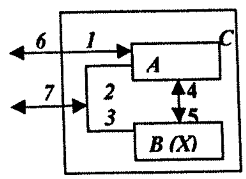

Рис. 1. Композиция полуавтоматов A и B

На рисунках стрелкой отмечены начальные состояния автоматов. Финальные состояния закрашены серым цветом.

$$\pi = \{\overline{1,6}\,;\overline{2,3,7}\,;\ \overline{4,5}\,\},$$
$$\theta = \{\overline{1,6}\,;\overline{2,3,7}\,\},$$
$$\rho = \{\overline{2,3,7}\,;\ \overline{4,5}\,\}.$$

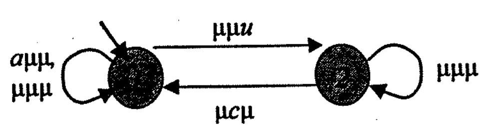

Рис. 2. Полуавтомат A с алфавитом действий $x_1 \times x_2 \times x_4 = \{a,\mu\}\times\{c,\mu\}\times\{u,\mu\}$

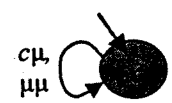

Рис. 3. Полуавтомат B с алфавитом действий $x_3 \times x_5 = \{c,\mu\}\times\{u,\mu\}$

Если действовать согласно приведенному алгоритму, то компонента C, реализующая синхронную обобщенную композицию, будет иметь следующий вид:

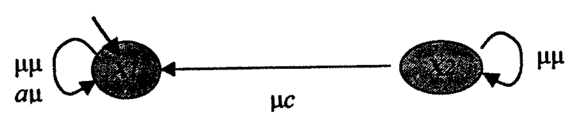

Рис. 4. Полуавтомат С

Решим обратную задачу. Найдем наибольшее решение уравнения $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(A,\overline{C})}$.

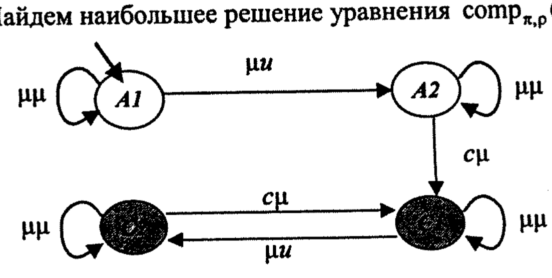

Рис. 5. Полуавтомат $\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(A,\ \overline{C}\ )$

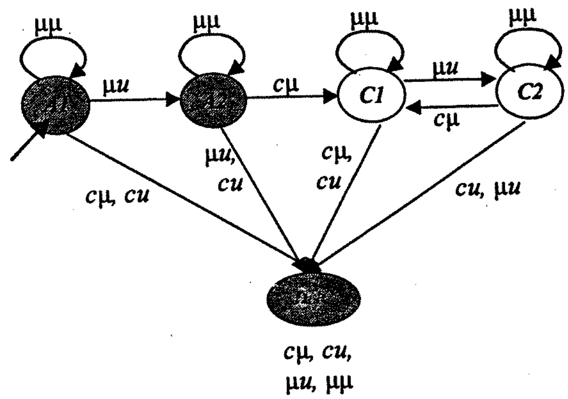

Рис. 6. Полуавтомат $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(A, \overline{C})}$ (полуавтомат, описывающий поведение неизвестной компоненты X)

Можно заметить, что полуавтомат B является редукцией найденного решения.

В заключение заметим, что наибольшее решение для случаев бинарной синхронной и параллельной композиции [3] есть частный случай решения $\overline{\mathrm{comp}_{\pi,\rho}(C_1,\ldots,C_{m-1}, \overline{C})}$. Например, в случае параллельного уравнения $C_1 \Diamond X \leq C$ все общие действия выполняются по общему каналу, который является внутренним. Таким образом, структура π неявно присутствует в самом определении композиции. Поэтому наибольшее общее решение имеет вид $\overline{A \Diamond \overline{C}}$.

Заключение

В данной работе мы обобщили понятие бинарного оператора композиции языков, введенное в [3], на случай произвольного числа компонентных языков. Показали, что операторы синхронной и параллельной композиции являются частными случаями введенного оператора. Мы рассмотрели задачу синтеза неизвестной компоненты, которая сводится к решению соответствующего автоматного уравнения. Так же как и в случае бинарного оператора композиции, разрешимое уравнение обладает наибольшим решением, которое выражается через операции расширения, пересечения и проекции языков. Существование решения существенно зависит от структуры синтезируемой сети, которая, в отличие от предыдущих работ, в явном виде присутствует в уравнении. Работа частично поддержана программой «Университеты России».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kim T., Villa T., Brayon R., Sangioani-Vincentelli A.* Synthesis of FSMs: functional optimization: Kluwer Academic Publishers, 1997.
2. *Yevtushenko N., Villa T., Brayton R., Petrenko A., Sangiovani-Vincentelli A.* Synthesis by language equation solving: exended abstract // In Proc.of Annual Intern.worjshop on Logic Synthesis, 2000. – P.11-14.
3. *Евтушенко Н., Вилла Т., Петренко А., Брайтон Р., Санджованни-Винцентелли А.* Решение уравнений в логическом синтезе. – Томск: Изд-во «Спектр», 1999. – 27 с.
4. *Агибалов Г.П., Оранов А.М.* Лекции по теории конечных автоматов. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1975. – 112 с.